例数制限付き教示の複雑さ (理論計算機科学の深化と応用)

AUTHOR(S):

小林, 隼人; 篠原, 歩

CITATION:

小林, 隼人 ...[et al]. 例数制限付き教示の複雑さ (理論計算機科学の深化と応用). 数理解析研究所講究録 2009, 1649: 165-172

ISSUE DATE:

2009-05

URL:

http://hdl.handle.net/2433/140741

数理解析研究所講究録
第 1649 巻 2009 年 165-172

例数制限付き教示の複雑さ

小林 隼人 (Hayato Kobayashi), 篠原 歩 (Ayumi Shinohara)
東北大学大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

1 はじめに

計算学習理論は，人間の高度な知的行動である**学習** (*learning*) を数学的に定式化し，その性質を解明することを目的とした分野である．これまでに，帰納推論 [3], PAC 学習 [11], 質問学習 [1] などの学習モデルを用いて様々に研究が行われている．一方で，学習と表裏一体をなす**教示** (*teaching*) に関しても，様々な教示モデルを用いて盛んに研究が行われている [10, 4, 7, 6, 9, 8, 5, 2, 12]. これらの研究では，それぞれの教示モデルで最小限必要な例数を複雑さの指標にしているが，本論文では，例数が制限された状況を想定し，そこでの教示の複雑さを調べる．

例数が制限された状況を議論することは，教示の理論を現実世界に近づけることに他ならない．実際，人に何かを教えるとき，時間（例数）が制限されていることの方が一般的である．例えば，学校の教師は授業時間内に，すべての学生に授業内容を理解させなければならない．学校の教師でなくとも，就職面接での自己アピールや，研究成果のプレゼンテーションなどは時間が制限された状況の好例であり，多くの人がが体験していると思われる．その他にも，ロボットとの対話式の学習などは，コストの問題により試行回数が制限される場合が多い．本論文で提案する教示モデルは，これらの現実世界の状況をモデル化したものである．

本論文では，例数が制限された状況における教示を，例数制限付き教示モデルとして定式化する．この教示モデルでは，**教示誤差** (*teaching error*) の最小値を複雑さの指標とする．教示誤差は，非形式的に表現すれば，例集合に無矛盾な概念集合における目標概念との最悪時誤差である．この誤差がゼロのとき，元々の教示モデルにおける教示が成功した，すなわち目標概念を特定するような例集合を学習者に与えたことを意味する．我々は具体的な概念クラスを示すことにより，我々の教示モデルと元々の教示モデルとの違いを明らかにする．我々の教示モデルにおいては，いつ教示が終了しても教示誤差を最小にできる教示方法（例を与える順番）が存在するとき，特別な戦略が必要ないという意味で教示が簡単だと言える．我々はそのような概念クラスを**単調教示可能** (*monotone teachable*) と定義し，計算学習理論で最も基本的でよく研究されている単調単項式と単項式の 2 つの概念クラスについて，その単調教示可能性を調べる．

2 準備

集合 S の要素数を $\#S$ または $|S|$ で表す．自然数の集合を $\mathbf{N}$ で表し，任意の自然数 $i, j \in \mathbf{N}$ について，$[i, j] := \{i, \cdots, j\}$ とする．

X を入力空間とする．$\mathcal{X} = X \times \{0, 1\}$ を例集合とする．$\mathcal{C} \subseteq 2^X$ を概念クラスとよび，$c \in \mathcal{C}$ を概念と呼ぶ．ここで，$\mathcal{X}(c) := \{(x, b) \in \mathcal{X} \mid x \in c \Leftrightarrow b = 1\}$ とする．例 $(x, b) \in \mathcal{X}$ は，$(x, b) \in \mathcal{X}(c)$ であるとき，かつそのときに限り，c と無矛盾であるという．例集合 $S \subseteq \mathcal{X}$ と無矛盾な概念クラス $\mathcal{C}$ 中の概念の集合を $CONS(S, \mathcal{C}) := \{c \in \mathcal{C} \mid S \subseteq \mathcal{X}(c)\}$ と表す．

2 つの概念 $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ の対称差を $c_1 \Delta c_2$ で表す．すなわち，$c_1 \Delta c_2 := (c_1 - c_2) \cup (c_2 - c_1)$. 2 つの概念 c_1 と c_2 の分布 D に関する誤差は，$d_D(c_1, c_2) := \sum_{x \in c_1 \Delta c_2} \Pr_D(x)$ で表される．本論文では，X が有限で，確率分布 D は一様分布と仮定するため，D を省略し，$d(c_1, c_2)$ と書く．すなわち，$d(c_1, c_2) := |c_1 \Delta c_2| / |X|$.

例集合 S が $\mathcal{C}$ に関する c の教示集合であるとは，S と無矛盾な $\mathcal{C}$ 中の概念が c だけであるとき，すなわち $CONS(S, \mathcal{C}) = \{c\}$ のときをいう．$\mathcal{C}$ における c に対するすべての教示集合の族を $TS(c, \mathcal{C}) := \{S \subseteq \mathcal{X} \mid CONS(S, \mathcal{C}) = \{c\}\}$ と表す．$\mathcal{C}$ に関する概念 c の教示次元 $TD(c, \mathcal{C})$ を，最小の教示集合の大きさで定義する．すなわち，$TD(c, \mathcal{C}) := \min \{|S| \mid S \in TS(c, \mathcal{C})\}$. 概念クラス $\mathcal{C}$ の教示次元 $TD(\mathcal{C}) := \max_{c \in \mathcal{C}} TD(c, \mathcal{C})$ は，$\mathcal{C}$ 中の概念の最大の教示次元で定義される．$\mathcal{C}$

に関する c の最小の教示集合の族を $MTS(c,\mathcal{C}) := \{S \in TS(c,S) \mid |S| = TD(c,\mathcal{C})\}$ と書く．

Σ を任意のアルファベットとする．文字列 $u \in \Sigma^n$ について，文字列 u 中のすべての文字 a を b に置き換えて得られる文字列を $u[\frac{a}{b}]$ で表す．2 つの文字列 $u_1, u_2 \in \Sigma^n$ について，そのハミング距離を $H(u_1,u_2)$ で表す．特に $\Sigma = \{0,1\}$ のとき，バイナリ文字列 $u \in \Sigma^n$ とのハミング距離が 1 であるバイナリ文字列の集合を参照するために，$\mathcal{N}_1(u) := \{u' \in \Sigma^n \mid H(u,u') = 1\}$ と定義する．$\overline{0} := 1$，$\overline{1} := 0$ とし，$\overline{u} := \overline{u[1]}\,\overline{u[2]}\cdots\overline{u[n]}$ とする．

3 例数制限付き教示の複雑さ

我々のモデルでは，教師が学習者に与えることのできる例数が制限されているため，学習者に目標概念を特定させることが困難である．そこで，目標概念との誤差を教示の複雑さの指標にすることを考える．このとき，元々の教示モデルと同様に，最悪時の学習者を想定する．具体的には，最悪時の誤差を教示誤差として次のように定義する．

定義 1 (教示誤差). $\mathcal{C}$ を概念クラス，$c \in \mathcal{C}$ を目標概念とする．任意の例集合 $S \subseteq \mathcal{X}$ について，**S による $\mathcal{C}$ についての c の教示誤差**を次式で定義する．

$$TE(c,\mathcal{C},S) := \begin{cases} \max\limits_{c' \in CONS(S,\mathcal{C})} d(c,c') & (CONS(S,\mathcal{C}) \neq \emptyset), \\ 1 & (otherwise). \end{cases}$$

例数が k に制限された状況において，ある概念の教示の複雑さを，k 個の例で達成しうる最小の教示誤差で表す．我々はこれを最適教示誤差と呼び，次のように定義する．

定義 2 (最適教示誤差). $\mathcal{C}$ を概念クラス，$c \in \mathcal{C}$ を目標概念とする．**高々 k 個の例による $\mathcal{C}$ についての c の最適教示誤差**を次式で定義する．

$$OTE_k(c,\mathcal{C}) := \min_{S \subseteq \mathcal{X}:|S| \leq k} TE(c,\mathcal{C},S)$$

また，**高々 k 個の例による $\mathcal{C}$ の最適教示誤差**を次式で定義する．

$$OTE_k(\mathcal{C}) := \max_{c \in \mathcal{C}} OTE_k(c,\mathcal{C})$$

概念 $c \in \mathcal{C}$ について，最適教示誤差となる大きさ k 以下の例集合を k-最適教示集合と呼び，その族を $OTS_k(c,\mathcal{C}) := \{S \subseteq \mathcal{X} \mid |S| \leq k, TE(c,\mathcal{C},S) = OTE_k(c,\mathcal{C})\}$ とする．

表 1: 定理 3 の具体例.

h	x_1	x_2	x_3	$d(c_0,h)$
c_0	1	1	1	0/3
c_1	1	0	1	1/3
c_2	1	0	0	2/3
c_3	0	1	1	1/3
c_4	0	1	0	2/3

最適教示誤差は，0 から 1 の値をとり，小さいほどよい．例数制限 k が $k \geq TD(c,\mathcal{C})$ のとき，$S' \in MTS(c,\mathcal{C})$ をとると常に $S' \in OTS_k(c,\mathcal{C})$ となるので，$OTE_k(c,\mathcal{C}) := \min_{S \subseteq \mathcal{X}:|S| \leq k} TE(c,\mathcal{C},S) = TE(c,\mathcal{C},S') = 0$ である．したがって，本論文では $k < TD(c,\mathcal{C})$ のときに焦点を絞り考察する．

まず，k-最適教示集合について，次の 2 つの重要な定理を証明する．

定理 3. 次の命題を満たす概念クラス $\mathcal{C}$，目標概念 $c \in \mathcal{C}$，正整数 k が存在する．

任意の $S_1 \in OTS_k(c,\mathcal{C})$ と $S_2 \in MTS(c,\mathcal{C})$ について，S_1 が S_2 の部分集合とならない．

証明: 表 1 に，そのような概念クラス $\mathcal{C} = \{c_0,\cdots,c_4\}$ と目標概念 $c_0 \in \mathcal{C}$ を示した．入力空間は $X = \{x_1,x_2,x_3\}$ である．$k = 1$ のとき，k-最適教示集合は $\{(x_3,1)\}$ のみであり，最適教示誤差は $OTE_k(c_0,\mathcal{C}) = 1/3$ である．その他の例集合 S をどのようにとっても，c_2 または c_4 を排除することができないので，教示誤差が $TE(c_0,\mathcal{C},S) \geq 2/3$ となり最適とはならない．しかしながら，最適教示集合は $\{(x_1,1),(x_2,1)\}$ のみである． ■

定理 4. 次の命題を満たす概念クラス $\mathcal{C}$，目標概念 $c \in \mathcal{C}$，整数 $k > 0$ が存在する．

任意の $S \in OTS_k(c,\mathcal{C})$ について，c が S と矛盾する．

証明: 表 2 にそのような概念クラス $\mathcal{C} = \{c_0,\cdots,c_5\}$ と目標概念 $c_0 \in \mathcal{C}$ を示す．入力空間は $X = \{x_1,\cdots,x_5\}$ である．$k = 1$ のとき，k-最適教示集合は $S = \{(x_1,0)\}$ のみであり，最適教示誤差は $OTE_k(c_0,\mathcal{C}) = 1/5$ である．その他の例集合 S' をどのようにとっても，$c_2,\cdots,c_5$ のすべてを排除することはできないので，$TE(c_0,\mathcal{C},S') \geq 3/5$ となり最適とはならない．し

表 2: 定理 4 の具体例.

h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$d(c_0,h)$
c_0	1	1	1	1	1	0/5
c_1	0	1	1	1	1	1/5
c_2	1	1	0	0	0	3/5
c_3	1	0	1	0	0	3/5
c_4	1	0	0	1	0	3/5
c_5	1	0	0	0	1	3/5

かしながら，c_0 は例集合 S とは矛盾する．すなわち，$c_0 \notin CONS(S,\mathcal{C})$. ■

定理 3，定理 4 は学習者に与える例の個数を制限したときに，最適な教示方法が通常のそれとは異なりうることを示唆している．つまり，例の個数が制限されている環境で最大の教示効果を得るためには，それ相応の教示アルゴリズムが必要だということである．

概念クラスについて，ある教示アルゴリズムが存在し，いつ教示が終了しても最適であるとき，その概念クラスは単調教示可能という．具体的には，次のように定義する．

定義 5 (単調教示可能). $\mathcal{C}$ を概念クラス，$c \in \mathcal{C}$ を目標概念とする．次式を満たす例リスト $L := \langle z_1, z_2, \cdots \rangle$ が存在するとき，**$\mathcal{C}$ について c は単調教示可能**であるという．

$$\forall k \in [1, TD(c,\mathcal{C})], \{z_1, \cdots, z_k\} \in OTS_k(c,\mathcal{C})$$

$\mathcal{C}$ 中の任意の概念 $c \in \mathcal{C}$ が単調教示可能であるとき，$\mathcal{C}$ **は単調教示可能**であるという．

4 単項式概念クラスの教示

4.1 準備

n 変数 $v_1, \cdots, v_n$ 上の**単項式** (*monomial*) とは，リテラル $v_i, \overline{v_i}$ のいくつかの積で表されるブール式をいう．入力空間を $X_n = \{0,1\}^n$ とし，ブール式を充足する代入の集合として表される概念を考える．n 変数の単項式によって表される概念クラスを $\mathcal{M}_n$ で表す．$v_i \wedge \overline{v_i}$ のように同じ変数の正負のリテラルを含む単項式が表す概念は空集合となるが，これを以後，空概念と呼び c_e と表す．$\mathcal{M}_n$ から空概念を除いた概念クラスを $\mathcal{M}'_n$ と表す．すなわち，$\mathcal{M}'_n := \mathcal{M}_n - \{c_e\}$．このとき，$\mathcal{M}'_n$ 中の概念は，以下に定義するようにある文字列 $r \in \{0,1,*\}^n$ で一意に表現される．$r[i]$ は r の i 番目の文字を表し，その概念対応する単項式に v_i が現れるとき 1，$\overline{v_i}$ が現れるとき 0，どちらも現れないとき $*$ とする．たとえば，3 変数の単項式 $v_1 \wedge \overline{v_2}$ に対応する概念は $\{100, 101\}$ であるが，その文字列表現は $10*$ である．簡単のため，以後，$\mathcal{M}'_n$ の概念と表現を区別しない．また，文脈で明らかな場合は 0 と 1 が文字であるか数値であるか明記しない．概念 $c \in \mathcal{M}'_n$ に対応する単項式に現れるの変数の種類数を $var(c)$ で表す．すなわち，$var(c) := \#\{i \mid c[i] \neq *\}$．正のリテラルのみからなる単項式を**単調単項式** (*monotone monomial*) と呼び，n 変数の単調単項式によって表される概念クラスを $\mathcal{M}^+_n$ で表す．$\mathcal{M}^+_n \subseteq \mathcal{M}'_n$ である．

2 つの概念 $c_1, c_2 \in \mathcal{M}'_n$ について，$c_1[i] = 1$ かつ $c_2[i] = 0$，または $c_1[i] = 0$ かつ $c_2[i] = 1$ を満たすとき，それらの概念は位置 i で**強差異** (*strong difference*) を持つという．c_1 と c_2 の強差異の個数を $s(c_1,c_2)$ とする．すなわち，$s(c_1,c_2) := \#\{i \mid c_1[i] \in \{0,1\}, c_2[i] \in \{0,1\}, c_1[i] \neq c_2[i]\}$．$c_1$ と c_2 が位置 i で**弱差異** (*weak difference*) を持つとは，$c_1[i] = *$ かつ $c_2[i] \in \{0,1\}$，または $c_2[i] = *$ かつ $c_1[i] \in \{0,1\}$ を満たすときをいう．位置 i と j の 2 つの弱差異は，$c_1[i] = c_1[j] = *$ または，$c_1[i] = c_1[j] = *$ を満たすとき，同種であるという．つまり $*$ が同じ単項式の表現に出てくるとき同種である．そうでなければ異種であるという．同種の弱差異の個数だけを参照するために，$w(c_1,c_2) := \#\{i \mid c_1[i] \in \{0,1\}, c_2[i] = *\}$ とする．$w(c_1,c_2) + w(c_2,c_1)$ が c_1 と c_2 の弱差異の総数である．c_1 と c_2 が，$c_1[i] = c_2[i] = *$ を満たすとき，位置 i で**任意一致** (*arbitrary match*) を持つという．任意一致の個数を $a(c_1,c_2)$ とする．すなわち，$a(c_1,c_2) := \#\{i \mid c_1[i] = c_2[i] = *\}$.

4.2 単調単項式の概念クラス

単調単項式のクラス $\mathcal{M}^+_n$ については，Shinohara と Miyano [10] と Goldman ら [4] がそれぞれ独立に研究しており，その教示次元が高々n となることを示した．特に Goldman らは，概念 $c \in \mathcal{M}^+_n$ それぞれについて考察し，次の定理を示した．

定理 6 ([4]). 任意の $c \in \mathcal{M}^+_n$ について，$\mathcal{M}^+_n$ についての c の教示次元は次式で表される．

$$TD(c,\mathcal{M}^+_n) = \min\{var(c)+1, n\}.$$

次式で定義する集合 S_ℓ は，$\mathcal{M}_n^+$ についての概念 $1^\ell *^{n-\ell}$ の最適教示集合のひとつである．

$$S_\ell := \begin{cases} \{(u,0) \mid u \in \mathcal{N}_1(1^\ell)\} & (\ell = n) \\ \{(u1^{n-\ell},0) \mid u \in \mathcal{N}_1(1^\ell)\} \\ \quad \cup \{(1^\ell 0^{n-\ell},1)\} & (\ell \neq n) \end{cases}$$

この定理は，$\mathcal{M}_n^+$ についての c の教示次元と，その最小教示集合の具体例 S_ℓ を与えるものである．最小教示集合は，本論文の目的に照らして言い換えれば，例数制限がない場合の最適な例の与え方を示している．これに対し，本論文では例数制限のある場合の最適な例の与え方について考察する．

まず，$\mathcal{M}_n^+$ 上の 2 つの概念に対する誤差を与える式を示す．

補題 7. 任意の概念 $c_1, c_2 \in \mathcal{M}_n^+$ について，次式が成り立つ．

$$d(c_1,c_2) = \frac{(2^{\tilde{w}_1} + 2^{\tilde{w}_2})2^{\tilde{a}}}{2^n}$$

ここで，$\tilde{w}_1 = w(c_1,c_2)$，$\tilde{w}_2 = w(c_2,c_1)$，$\tilde{a} = a(c_1,c_2)$．

証明: 定義より，$|c_1 \Delta c_2|$ は，$x \in c_1$ かつ $x \notin c_2$，または，$x \notin c_1$ かつ $x \in c_2$ であるような $x \in X_n$ の個数である．

まず，$x \in c_1$ かつ $x \notin c_2$ の個数について考える．このとき，$x \in c_1$ となる入力 $x \in X_n$ は，c_1 の表現中の $*$ の個数分の 0,1 のとり方の数だけ，つまり $2^{\tilde{w}_2+\tilde{a}}$ 個存在する．ただし，それらの入力の中で，すべての i について $c_2[i] \neq * \Rightarrow x[i] = c_2[i]$ を満たす x は $x \in c_2$ となる．その個数は $2^{\tilde{a}}$ であるので，$x \in c_1$ かつ $x \notin c_2$ である例は $(2^{\tilde{w}_2} - 1)2^{\tilde{a}}$ 個存在する．

同様にして，$x \notin c_1$ かつ $x \in c_2$ の個数は $(2^{\tilde{w}_1} - 1)2^{\tilde{a}}$ 個存在する．$x \in c_1$ かつ $x \notin c_2$ の個数と $x \notin c_1$ かつ $x \in c_2$ の個数を足して，$|X_n| = 2^n$ で割れば $d(c_1,c_2)$ の式が得られる． ■

証明に有用な次の 2 つの補題を証明する．

補題 8. 任意の入力 $x \in \mathcal{N}_1(1^n)$ と整数 $i \in [0,n]$ について，次式が成り立つ．

$$x[i] = 0 \Rightarrow \forall c \in CONS(\{(x,0)\}, \mathcal{M}_n^+), c[i] = 1$$

証明: ある概念 $c \in CONS(\{(x,0)\}, \mathcal{M}_n^+)$ が存在し，$c[i] \neq 1$ つまり $c[i] = *$ と仮定する．$x \in \mathcal{N}_1(1^n)$ より，x は位置 i 以外すべて 1 なので，$x \in c$ である．したがって，$c \notin CONS(\{(x,0)\}, \mathcal{M}_n^+)$ となり矛盾． ■

補題 9. $S \subseteq \mathcal{X}$ を $CONS(S, \mathcal{M}_n^+) \neq \emptyset$ である例集合とする．S 中のすべての負例からなる集合 $S^- := \{(x,0) \in S\}$，任意の整数 $k \in [1,n]$ について，次式が成り立つ．

$$|S^-| < k \Rightarrow \exists c \in CONS(S, \mathcal{M}_n^+), var(c) < k.$$

証明: 対偶命題 $\forall c \in CONS(S, \mathcal{M}_n^+), var(c) \geq k \Rightarrow |S^-| \geq k$ を証明する．

対偶命題の仮定と $CONS(S, \mathcal{M}_n^+) \neq \emptyset$ より，ある概念 c' が存在し，$var(c') \geq k$ である．$\ell' := var(c')$ とする．対称性より，一般性を失うことなく $c' := 1^{\ell'} *^{n-\ell'}$ とする．

対偶命題の仮定より，$k-1$ 個の変数を持つ概念（の一部）からなる集合 $\mathcal{C}^- := \{u[{}^0_*]*^{n-k} \mid u \in \mathcal{N}_1(1^k)\}$ について，$\mathcal{C}^- \cap CONS(S, \mathcal{M}_n^+) = \emptyset$ でなければならない．そのためには，任意の $c^- \in \mathcal{C}^-$ について，$z \in S$ が存在し，$z \in \mathcal{X}(c')$ かつ $z \notin \mathcal{X}(c^-)$ を満たす必要がある．$c' \subseteq c^-$ なので，そのような z は常に負例である．言い換えれば，すべての $u \in \mathcal{N}_1(1^k)$ について，$u' \in \{0,1\}^{n-k}$ が存在し，$(uu',0) \in S^-$．したがって，$|S^-| \geq |\mathcal{N}_1(1^k)| = k$ である． ■

次の定理は，単調単項式の概念 $c \in \mathcal{M}_n^+$ の最適教示誤差を表す．

定理 10. 変数の種類数 $\ell := var(c)$ の任意の概念 $c \in \mathcal{M}_n^+$ と，任意の整数 $k \in [1, TD(c, \mathcal{M}_n^+) - 1]$ について，次式が成り立つ．

$$OTE_k(c, \mathcal{M}_n^+) = \begin{cases} \dfrac{2^{n-k} - 2^{n-\ell}}{2^n} & (k \neq \ell), \\ \dfrac{2^{n-k} - 1}{2^n} & (k = \ell). \end{cases}$$

証明: 対称性より，一般性を失うことなく $c = 1^\ell *^{n-\ell}$ とする．

例集合 $S := \{(u1^{n-k},0) \mid u \in \mathcal{N}_1(1^k)\}$ とする．定義より $|S| = |\mathcal{N}_1(1^k)| = k$．この例集合 S が k-最適教示集合であることを示す．

まず，概念 c に対する例集合 S による教示誤差を求める．例集合 S と無矛盾な概念集合は，補題 8 より $CONS(S, \mathcal{M}_n^+) = \{1^k u \mid u \in \{1,*\}^{n-k}\}$ である．$n = 20$，$\ell = 10$，$k = 5$ のときの c と $c' \in CONS(S, \mathcal{M}_n^+)$ の具体例を以下に示す．

$$\begin{aligned} c &= \overbrace{\mathtt{1111111111}}^{\ell}\mathtt{**********} \\ c' &= \underbrace{\mathtt{11111}}_{k}\mathtt{*1****1**111**1} \end{aligned}$$

このとき，$a(c,c')=5$，$w(c,c')=4$，$w(c',c)=5$ である．一般に，任意の $c' \in CONS(S,\mathcal{M}_n^+)$ について，$0 \le a(c,c') \le n-\ell$，$0 \le w(c,c') \le \ell-k$, $a(c,c') + w(c',c) = \#\{i \mid c[i]=*\} = n-\ell$ が成り立つ．したがって，c に対する S による教示誤差は，$\tilde{a} := a(c,c')$，$\tilde{w} := w(c,c')$ として，

$$\begin{aligned} TE(c,\mathcal{M}_n^+,S) &= \max_{c' \in CONS(S,\mathcal{M}_n^+)} d(c,c') \\ &= \max_{\substack{0 \le \tilde{a} \le n-\ell \\ 0 \le \tilde{w} \le \ell-k}} \frac{(2^{\tilde{w}} - 2^{n-\ell-\tilde{a}} - 2)2^{\tilde{a}}}{2^n} \\ &= \begin{cases} \dfrac{2^{n-k} - 2^{n-\ell}}{2^n} & (\ell \ne k) \\ \dfrac{2^{n-k}-1}{2^n} & (\ell = k) \end{cases} \end{aligned}$$

である．

次に，この S による教示誤差が最適であることを示す．S' を k-最適教示集合のひとつ，すなわち，$S' \in OTS_k(c,\mathcal{M}_n^+)$ とする．S' について，次の主張が成り立つ．

主張. $\forall (x,b) \in S', b=0$

証明: S' が正例を含むと仮定する．S' 中の負例を S^- とすると，$S^- < k$ である．$S' \in OTS_k(c,\mathcal{M}_n^+)$ より，明らかに $CONS(S',\mathcal{M}_n^+) \ne \emptyset$. よって，補題9より，ある概念 $c' \in CONS(S',\mathcal{M}_n^+)$ が存在し，$\ell' := var(c') < k$ である．この c' について，$a(c,c') + w(c,c') = \#\{i \mid c'[i] = *\} = n-\ell'$，$a(c,c') + w(c',c) = \#\{i \mid c[i] = *\} = n-\ell$，$a(c,c') \le n-\ell$ が成り立つ．したがって，$\tilde{a} := a(c,c')$ として，

$$\begin{aligned} TE(c,\mathcal{M}_n^+,S') &= \max_{c'' \in CONS(S,\mathcal{M}_n^+)} d(c,c'') \\ &\ge d(c,c') \\ &= \frac{(2^{n-\ell'-\tilde{a}} + 2^{n-\ell-\tilde{a}} - 2)2^{\tilde{a}}}{2^n} \\ &= \frac{2^{n-\ell'} + 2^{n-\ell} - 2^{\tilde{a}+1}}{2^n} \\ &\ge \frac{2^{n-\ell'} - 2^{n-\ell}}{2^n} \end{aligned}$$

である．

$\ell \ne k$ のとき，$\ell' < k$ より，$TE(c,\mathcal{M}_n^+,S') > (2^{n-k} - 2^{n-\ell})/2^n = TE(c,\mathcal{M}_n^+,S)$. $\ell = k$ のとき，$TE(c,\mathcal{M}_n^+,S') = (2^{n-\ell'} - 2^{n-k})/2^n = (2^{k-\ell'} - 1)2^{n-k}/2^n$ である．$\ell' < k$ より，$TE(c,\mathcal{M}_n^+,S') \ge 2^{n-k}/2^n > (2^{n-k}-1)/2^n = TE(c,\mathcal{M}_n^+,S)$. よって，$S' \notin OTS_k(c,\mathcal{M}_n^+)$ となり矛盾．■主張

$\ell \ne k$ のときの最適教示誤差 $OTE_k(c,\mathcal{M}_n^+)$ の下限を求める．補題 9 より，ある概念 $c' \in CONS(S',\mathcal{M}_n^+)$ が存在し，$\ell' := var(c')$ とおくと，$\ell' \le k$ である．主張と同じ議論より，$OTE_k(c,\mathcal{M}_n^+) = TE(c,\mathcal{M}_n^+,S') \ge (2^{n-\ell'} - 2^{n-\ell})/2^n \ge (2^{n-k} - 2^{n-\ell})/2^n = TE(c,\mathcal{M}_n^+,S)$.

$\ell = k$ のときの $OTE_k(c,\mathcal{M}_n^+)$ の下限を求める．主張より，S' と無矛盾な概念集合の中に概念 $c_n := 1^n$ が必ず存在する．この概念 c_n について，$a(c,c_n)=0$, $w(c,c_n)=0$，$w(c_n,c) = \#\{i \mid c[i]=*\} = n-\ell$ なので，$OTE_k(c,\mathcal{M}_n^+) = TE(c,\mathcal{M}_n^+,S') \ge (2^{n-\ell}-1)/2^n = (2^{n-k}-1)/2^n = TE(c,\mathcal{M}_n^+,S)$.

以上より，S は k-最適教示集合である．■

系 11. 任意の整数 $k \in [1, TD(\mathcal{M}_n^+)-1]$ について，次式が成り立つ．

$$OTE_k(\mathcal{M}_n^+) = \frac{2^{n-k}-1}{2^n}$$

単調単項式の概念クラス $\mathcal{M}_n^+$ の単調教示可能性に関して，次の定理が成り立つ．

定理 12. 単調単項式の概念クラス $\mathcal{M}_n^+$ は単調教示可能である．

証明: 任意の $c \in \mathcal{M}_n^+$ について，$\ell := var(c)$ とする．対称性から，一般性を失うことなく $c = 1^\ell *^{n-\ell}$ とする．例の順番を

$$z_i := \begin{cases} (1^{i-1}01^{n-i}, 0) & (i \le var(c)) \\ (1^n, 1) & (otherwise) \end{cases}$$

とする．$k \in [1, TD(c,\mathcal{M}_n^+)-1]$ のとき，定理 10 の S，$\{z_i \mid i \in [1,k]\} \in OTS_k(c,\mathcal{M}_n^+)$ である．$k = TD(c,\mathcal{M}_n^+)$ のとき，定理 13 より，$\{z_i \mid i \in [1,k]\} \in OTS_k(c,\mathcal{M}_n^+) = TS(c,\mathcal{M}_n^+)$ である．したがって，$\mathcal{M}_n^+$ は単調教示可能．■

5 単項式の概念クラス

本節では，単項式の概念クラス $\mathcal{M}_n$ の例数制限付き教示の複雑さについて考察する．証明の際は，空概念 $c_e \in \mathcal{M}_n$ を取り除いた概念クラス $\mathcal{M}'_n$ を考えることで，文字列表現の無い空概念 c_e を特別扱いする．

概念クラス $\mathcal{M}'_n$ の教示次元については，Goldman ら [4] が高々$n+1$ であることを次の定理で示した．定理中の最小教示集合 S_ℓ は，対応する単調単項式の最小教示集合に正例をひとつ加えたものである．

定理 13 ([4]). 任意の概念 $c \in \mathcal{M}'_n$ について，教示次元は次式で表される．

$$TD(c, \mathcal{M}'_n) = \min\{var(c) + 2, n + 1\}.$$

文字列 $w \in \{0,1\}^\ell$ とする．次式で定義する集合 S_ℓ は $\mathcal{M}'_n$ についての概念 $c = w*^{n-\ell}$ の最適教示集合のひとつである．

$$S_\ell := \begin{cases} \{(u,0) \mid u \in \mathcal{N}_1(w)\} \cup \{(1^n,1)\} & (\ell = n) \\ \{(u1^{n-\ell},0) \mid u \in \mathcal{N}_1(w)\} & \\ \quad \cup\{(w0^{n-\ell},1)\} \cup \{(w1^{n-\ell},1)\} & (\ell \neq n) \end{cases}$$

まず，$\mathcal{M}'_n$ 上の 2 つの概念に対する誤差を与える式を示す．

補題 14. 任意の概念 $c_1, c_2 \in \mathcal{M}'_n$ について，次式が成り立つ．

$$d(c_1, c_2) = \frac{(2^{\tilde{w}_1} + 2^{\tilde{w}_2} - p)2^{\tilde{a}}}{2^n}$$

ここで，$\tilde{s} = s(c_1, c_2)$，$\tilde{w}_1 = w(c_1, c_2)$，$\tilde{w}_2 = w(c_2, c_1)$，$\tilde{a} = a(c_1, c_2)$，

$$p = \begin{cases} 2 & (\tilde{s} = 0) \\ 0 & (\tilde{s} > 0) \end{cases}$$

証明: 定義より，$|c_1 \Delta c_2|$ は，$x \in c_1$ かつ $x \notin c_2$，または，$x \notin c_1$ かつ $x \in c_2$ であるような $x \in X_n$ の個数である．

$\tilde{s} = 0$ のとき，補題 7 と同じ議論により，$d(c_1, c_2)$ の式が得られる．

$\tilde{s} > 0$ のとき，まず，$x \in c_1$ かつ $x \notin c_2$ の個数について考える．$\tilde{s} = 0$ のときと同様に，$x \in c_1$ となる例は，$2^{\tilde{w}_2} \cdot 2^{\tilde{a}}$ 個存在する．このとき，c_1 と c_2 に強差が存在することから，$x \in c_2$ となる例は存在しない．したがって，$x \in c_1$ かつ $x \notin c_2$ である例は $2^{\tilde{w}_2} \cdot 2^{\tilde{a}}$ 個存在する．

同様にして，$x \notin c_1$ かつ $x \in c_2$ の個数は $2^{\tilde{w}_1} \cdot 2^{\tilde{a}}$ 個存在する．したがって，これらを足し合わせて $|X_n| = 2^n$ で割れば $\tilde{s} > 0$ のときの $d(c_1, c_2)$ の式が得られる．■

次に，$\mathcal{M}'_n$ 上の概念と，空概念 c_e に対する誤差を与える式を示す．

補題 15. 任意の概念 $c \in \mathcal{M}'_n$ について，次式が成り立つ．

$$d(c_e, c) = \frac{2^{\tilde{e}}}{2^n},$$

where $\tilde{e} := \#\{\, i \mid c[i] = * \,\}$

証明: $c_e = \emptyset$ なので，任意の $x \in X_n$ について，$x \notin c_e$ である．したがって，$|c_e \Delta c|$ は $x \in c$ となる $x \in X_n$ の個数である．そのような x は，c の表現中の $*$ の個数分の 0 と 1 のとり方の数だけ，すなわち，$2^{\tilde{e}}$ 個存在する．これを $|X_n| = 2^n$ で割れば $d(c_e, c)$ の式が得られる．■

証明に有用な次の 2 つの補題を証明する．

補題 16. $c := 1^n$ と $S_1 := \{(0^n, 0)\}$ について，$n \geq 2$ で次式が成り立つ．

$$OTS_1(1^n, \mathcal{M}_n) = \{S_1\}$$

証明: まず，S_1 による $\mathcal{M}_n$ についての c の教示誤差 $TE(c, \mathcal{M}_n, S_1)$ を求める．$TE(c, \mathcal{M}_n, S_1) = \max\{d(c, c_e), TE(c, \mathcal{M}'_n, S_1)\}$ であるので，それぞれ求める．補題 15 より，$d(c, c_e) = 1/2^n$．S_1 と無矛盾な任意の概念 $c' \in CONS(S_1, \mathcal{M}'_n)$ について，$s(c, c') \geq 0$，$a(c, c') = 0$，$w(c, c') = n - s(c, c')$，$w(c', c) = 0$ である．よって，$TE(c, \mathcal{M}'_n, S_1) = (2^{n-1} - 1)/2^n$．したがって，$n \geq 2$ のとき $TE(c, \mathcal{M}_n, S_1) = (2^{n-1} - 1)/2^n$ である．

この S_1 が唯一の 1-最適教示集合であることを示す．例 $(x, b) \in \mathcal{X} - S_1$ が存在し，$TE(c, \mathcal{M}_n, \{(x, b)\}) \leq TE(c, \mathcal{M}_n, S_1)$ と仮定する．$b = 0$ のとき，$x \neq 0^n$ より，整数 $i \in [1, n]$ が存在し，$x[i] = 1$ である．このとき，$*^{i-1}0*^{n-i} \in CONS(\{(x, b)\}, \mathcal{M}_n)$ であるので，$TE(c, \mathcal{M}_n, \{(x, b)\}) \geq d(c, *^{i-1}0*^{n-i}) = 2^{n-1}/2^n$ となり仮定に矛盾．$b = 1$ のとき，$*^n \in CONS(\{(x, b)\}, \mathcal{M}_n)$ であるので，$TE(c, \mathcal{M}_n, \{(x, b)\}) \geq d(c, *^n) = (2^n - 1)/2^n$ となり仮定に矛盾．以上より，S_1 は唯一の 1-最適教示集合である．■

補題 17. $c := 1^n$ と $S_{opt} := \{(1^n, 1)\} \cup \{(u, 0) \mid u \in \mathcal{N}_1(1^n)\}$ について，次式が成り立つ．

$$MTS(c, \mathcal{M}_n) = \{S_{opt}\}$$

証明: 定理 13 より，$S_{opt} \in MTS(c, \mathcal{M}'_n)$ である．S_{opt} は正例を含むので，空概念 c_e を概念クラスに追加しても影響されない．すなわち，$S_{opt} \in MTS(c, \mathcal{M}_n)$ である．

S_{opt} 以外に教示集合が存在しないことを示す．$S \in MTS(c, \mathcal{M}_n)$ が存在し，$S \neq S_{opt}$ と仮定する．教示集合の定義から，$CONS(S, \mathcal{M}_n) = \{c\}$ である．$c_e \notin$

$CONS(S, \mathcal{M}_n)$ であるので，正例が必要である．c と無矛盾な正例は $(1^n, 1)$ しか存在しないので，$(1^n, 1) \in S$ である．また，任意の $i \in [1, n]$ について，$1^{i-1} * 1^{n-i} \notin CONS(S, \mathcal{M}_n)$ である．c と無矛盾な負例の中で，$1^{i-1} * 1^{n-i} \notin CONS(S, \mathcal{M}_n)$ を満たす例は $(1^{i-1}01^{n-i}, 0)$ しか存在しないので，$(1^{i-1}01^{n-i}, 0) \in S$ である．よって，$S_{opt} \subseteq S$ である．$|S| = |S_{opt}|$ より，$S_{opt} = S$ となるが，これは仮定に矛盾．■

単項式の概念クラス $\mathcal{M}_n$ の単調教示可能性に関して，次の定理が成り立つ．

定理 18. 単項式のクラス $\mathcal{M}_n$ は $n \geq 2$ で単調教示不可能である．

証明: $\mathcal{M}_n$ について $c := 1^n$ が単調教示不可能であることを示す．$\mathcal{M}_n$ について c が単調教示可能と仮定する．補題 16 より，$\mathcal{M}_n$ に対する c の 1-最適教示集合は，S_1 のみである．補題 17 より，$\mathcal{M}_n$ に対する c の最適教示集合は，S_{opt} のみである．しかし，$S_1 \not\subseteq S_{opt}$ であるので，$\mathcal{M}_n$ について c が単調教示可能であるという仮定に矛盾する．したがって，$\mathcal{M}_n$ について c は単調教示不可能である．■

6 まとめと今後の課題

本論文では，例数制限付き教示の複雑さについて考察した．我々は，例集合に無矛盾な概念と目標概念との最悪時の誤差を複雑さの指標とした．この指標に基づく議論により，例数制限のあるときの最適な教示方法は，通常の教示方法とは全く異なりうることを示した．さらに，既存の教示の指標とは異なり，矛盾した例を与える最適な教示方法が存在することを示した．これらの結果は，時間が限られている状況で物事を説明するときに，なるべく説明を簡略化し，場合によっては多少の嘘を交えたほうが相手に趣旨が伝わりやすいという経験則とよく合致している．

我々は，いつ教示が終了しても最適となるような理想的な教示方法が存在する概念クラスを単調教示可能と定義した．ある概念クラスが単調教示可能であるということは，直感的には，その概念クラスを教示する際に特別な「説明の簡略化」が必要ないことを意味している．我々は計算学習理論で最も基本的でよく研究されている単調単項式と単項式の 2 つの概念クラスについて，単調教示可能性を調べた．その結果，単調単項式の概念クラスは単調教示可能であり，単項式の概念クラスは単調教示不可能であることが分かった．

今後の課題は，他の概念クラスの単調教示可能性を調べることである．その際，単調教示の難しさの指標を新たに導入することを視野に入れている．例えば，単項式の概念クラスは単調教示不可能であるが，例数 3 以上では常に最適となる教示方法が存在することが分かっている．この例数を複雑さの指標とすることで，「説明の簡略化」の観点から概念クラスを特徴付けることが可能である．

参考文献

[1] Dana Angluin. Queries and Concept Learning. *Machine Learning*, Vol. 2, No. 4, pp. 319–342, 1988.

[2] Frank J. Balbach. Measuring teachability using variants of the teaching dimension. *Theoretical Computer Science*, Vol. 397, No. 1–3, pp. 94–113, 2008.

[3] E. Mark Gold. Language identification in the limit. *Information and Control*, Vol. 10, No. 5, pp. 447–474, 1967.

[4] Sally A. Goldman and Michael J. Kearns. On the Complexity of Teaching. *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 50, pp. 303–314, 1995.

[5] Steve Hanneke. Teaching Dimension and the Complexity of Active Learning. In *Proceedings of the 20th Annual Conference on Learning Theory (COLT2007)*, Vol. 4539 of *LNCS*, pp. 66–81. Springer-Verlag, 2007.

[6] Tibor Hegedűs. Generalized Teaching Dimensions and the Query Complexity of Learning. In *Proceedings of the Eighth Annual Conference on Computational Learning Theory (COLT 1995)*, pp. 108–117. ACM Press, 1995.

[7] Jeffrey Jackson and Andrew Tomkins. A Computational Model of Teaching. In *Proceedings of the Fifth Annual ACM Conference on Computational Learning Theory (COLT 1992)*, pp. 319–326. ACM Press, 1992.

[8] Homin K. Lee, Rocco A. Servedio, and Andrew Wan. DNF are teachable in the average case. *Machine Learning*, Vol. 69, No. 2–3, pp. 79–96, 2007.

[9] H. David Mathias. A Model of Interactive Teaching. *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 54, No. 3, pp. 487–501, 1997.

[10] Ayumi Shinohara and Satoru Miyano. Teachability in Computational Learning. *New Generation Computing*, Vol. 8, No. 4, pp. 337–347, 1991.

[11] Leslie G. Valiant. A Theory of the Learnable. *Communications of the ACM*, Vol. 27, No. 11, pp. 1134–1142, 1984.

[12] Sandra Zilles, Steffen Lange, Robert Hlte, and Martin Zinkevich. Teaching Dimensions Based on Cooperative Learning. In *Proceedings of the 21st Annual Conference on Learning Theory (COLT2008)*, pp. 135–146. Omnipress, 2008.